PDEs

Równania modelowe (rzędu 2)

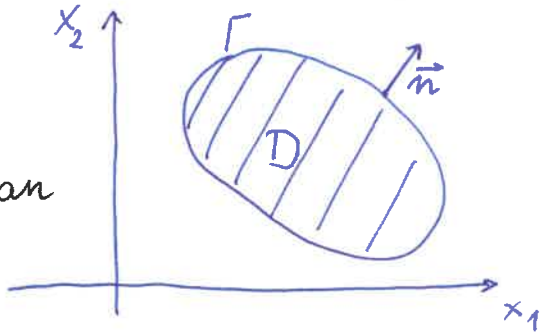
1. r. eliptyczne

$\Delta u = 0$ r. Laplace'a

lub $\Delta u = f$ r. Poissona

w $D \subset \mathbb{R}^N$

$D \subset \mathbb{R}^N$ obszar ograniczony



$$\Delta u := \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad \text{laplasjan}$$

+ warunki brzegowe:

$u|_\Gamma = g$ warunek Dirichleta

albo $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = g$ warunek Neumanna

albo $\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_\Gamma = g$ warunek Robina

opisuje: stany stacjonarne procesów fizycznych, np. stacjonarny rozkład temperatury, potencjał pola grawitacyjnego bądź pola elektromagnetycznego (w obszarze bez źródeł pola)

2. r. paraboliczne

$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$

$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$

$u_t - \Delta u = f$ $(x,t) \in D \times (0,T)$

$u|_\Gamma = g$ (war. brzegowy) $(x,t) \in \Gamma \times (0,T)$

$u(x,0) = h(x)$ $x \in D$ (war. początkowy)

opisuje: przewodnictwo cieplne

$u(x,t)$ jest temperaturą substancji (jednorodnej, izotropowej) w punkcie $x \in D$ i w chwili czasu t.

3. r. hiperboliczne

$$u_{tt} - \Delta u = f \qquad (x,t) \in D \times (0,T)$$
$$u = g \qquad (x,t) \in \Gamma \times (0,T)$$
$$u(x,0) = h_1(x), \quad u_t(x,0) = h_2(x) \qquad x \in D$$

opisuje: $N=1$ drgania struny
$N=2$ drgania membrany
$N=3$ fale elektromagnetyczne, akustyczne
$u(x,t)$ jest wychyleniem z położenia równowagi

Polecane źródło wiedzy:

P. Strzelecki, Krótkie wprowadzenie do równań różniczkowych cząstkowych, WUW 2006

L. Evans, Równania różniczkowe cząstkowe, PWN 2002

METODY WARIACYJNE

Zagadnienie Dirichleta

$$(*) \begin{cases} -\Delta u = f & (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2 \\ u|_\Gamma = 0 & (x,y) \in \Gamma \end{cases}$$

zerowe war. brzegowe

$Au = -u_{xx} - u_{yy}$ operator różniczkowy
$u \in D(A) = \{u \in C^2(D) : u|_\Gamma = 0\}$

(1) $Au = f, \quad u \in D(A).$

własności operatora A:
$u, v \in D(A)$

$$(Au, v) = \iint_D (-u_{xx}v - u_{yy}v)\,dx\,dy = \iint_D (u_x v_x + u_y v_y)\,dx\,dy$$

zatem A - symetryczny

$(Au,u) = \iint_D (u_x^2 + u_y^2)\,dxdy \geqslant 0$ $\quad$ A - op. dodatni

$\geqslant \gamma \|u\|^2_{L^2(D)}$ $\quad$ A - op. koercytywny (dodatnio określony)

nierówność Poincaré

Aby rozwiązać (*) (abstrakcyjnie (1) $Au = f$) metodami wariacyjnymi, należy znaleźć minimum funkcjonału (energii)

$$I(u) = (Au,u) - 2(f,u)$$

kawałek teorii abstrakcyjnej ...

Niech $\quad H$ będzie prz. Hilberta $\quad (\cdot,\cdot),\ \|\cdot\|$

$H_A \subset H$ gęsta

$A : H_A \to H$ operator liniowy i ciągły $\quad \big((Au,v) \leqslant M\|u\|\|v\|\big)$

ZADANIE

dane : $f \in H$

szukane: $u \in H_A$ t, że (1) $Au = f$

pomocniczo: $\quad$ (2) $\min\{I(z) : z \in H_A\}$, gdzie $I(z) = (Az,z) - 2(f,z)$

Tw. 1 $\quad$ A-dodatni $\Rightarrow$ (1) ma co najwyżej jedno rozwiązanie

$(Au,u) \geqslant 0$

$= 0$ dla $u = 0$

dw. Niech u_1, u_2 rozwiązania (1)

$Au_1 = f,\quad Au_2 = f$

odejmujemy stronami : $\quad Au_1 - Au_2 = 0$

z liniowości A : $\quad A(u_1 - u_2) = 0$

$(A(u_1 - u_2), u_1 - u_2) = 0$

A - dodatni $\Rightarrow$ $u_1 - u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$ $\quad \square$

$(Au,v)=(Av,u)$

Tw. 2 Z: A-dodatni, symetryczny, u_0-rozwiązanie (1)
T: u_0 minimalizuje $I(z)=(Az,z)-2(f,z)$

dw. Niech $z=u_0+t$, $t\in H_A$ dowolny

$$I(z)=(A(u_0+t),u_0+t)-2(f,u_0+t)=$$
$$=\underbrace{(Au_0,u_0)-2(f,u_0)}_{I(u_0)}+\underbrace{(At,u_0)}_{\substack{=(Au_0,t)\\ \text{symetryczność}}}+(At,t)+(Au_0,t)-2(f,t)=$$
$$=I(u_0)+\underbrace{(At,t)}_{\geq 0 \text{ dodatni}}+2(\underbrace{Au_0-f}_{=0\ (u_0-\text{rozwiązanie})},t)\geq I(u_0)$$

□

Tw. 3 Z: A-dodatni, symetryczny
$\bar{u}\in H_A$ minimalizuje I
T: $\bar{u}$ spełnia (1)

dw. Niech $z\in H_A$ dowolne, $\alpha\in\mathbb{R}$

$$I(\bar{u}+\alpha z)=I(\bar{u})+(A(\alpha z),\alpha z)+2(A\bar{u}-f,\alpha z)=$$
$$=I(\bar{u})+\alpha^2(Az,z)+2\alpha(A\bar{u}-f,z)\geq I(\bar{u})$$

bo $\bar{u}$-minimalizuje

więc $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ $\alpha^2\underbrace{(Az,z)}_{\geq 0}+\underbrace{2\alpha(A\bar{u}-f,z)}_{\text{to decyduje o znaku}}\geq 0 \Rightarrow (A\bar{u}-f,z)=0$ $\forall z\in H_A$

$\Downarrow$

$A\bar{u}=f$ □

Niech $\bar{z}$ będzie rozwiązaniem (2) $\min\{I(z): z\in H_A\}$. Ozn. $\mu:=I(\bar{z})$.
Zakładamy, że $\exists\{u_k\}\subset H_A$ t, że $\lim_{k\to\infty} I(u_k)=\mu$.
$\{u_k\}$ ciąg minimalizujący I.

Tw. 4 Z: A-symetryczny, dodatnio określony $(Au,u)\geq k\|u\|^2$, $k>0$
T: dowolny ciąg minimalizujący $\{u_k\}$ jest zbieżny do rozwiązania $\bar{z}$.

dw.

$$I(\bar z)=(A\bar z,\bar z)-2(\underset{\substack{\| \\ A\bar z\ (\text{tw.}3)}}{f},\bar z)=(A\bar z,\bar z)-2(A\bar z,\bar z)=-(A\bar z,\bar z)$$

$$\underbrace{I(u_k)-I(\bar z)}_{\substack{\downarrow k\to 0 \\ 0}}=(Au_k,u_k)-2(\underset{\substack{\| \\ A\bar z\ (\text{tw.}3}}{f},u_k)-(A\bar z,\bar z)+2(f,\bar z)=$$

$$\left(\text{bo } I(u_k)\to\mu=I(\bar z)\right) \quad = A(u_k-\bar z),u_k-\bar z)\geq \underset{\substack{\vee \\ 0}}{k}\|u_k-\bar z\|^2\geq 0$$

zatem $\|u_k-\bar z\|\to 0 \Rightarrow u_k\to\bar z$

$\square$

METODA RITZA (konstrukcja ciągu minimalizującego)

H_A ośrodkowa $\quad \exists\{z_k\}\subset H_A:\ \forall n\ z_1,\dots,z_n$ liniowo niezależne

$\forall\varepsilon>0\ \forall y\in H_A\ \exists m,\alpha_1,\dots,\alpha_m\ \left(A(y-\sum_{j=1}^{m}\alpha_j z_j),\,y-\sum_{j=1}^{m}\alpha_j z_j\right)<\varepsilon.$

Sposób postępowania:

1. ustalam n, oznaczam $u_n=\sum_{k=1}^{n}\beta_k z_k\in SPAN\{z_1,\dots,z_n\}$

(n-te przybliżenie)

$$I(u_n)=\left(A\left(\sum_{k=1}^{n}\beta_k z_k\right),\sum_{k=1}^{n}\beta_k z_k\right)-2\left(f,\sum_{k=1}^{n}\beta_k z_k\right)\overset{A\text{-liniowe}}{=}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(Az_k,z_j)\beta_k\beta_j-2\sum_{k=1}^{n}(f,z_k)\beta_k=:F(\beta_1,\dots,\beta_n)$$

2. Szukam minimum F: $\quad \min\{F(\beta):\beta\in\mathbb{R}^n\}$

$$(3)\quad \frac{\partial F}{\partial\beta_k}=0,\ k=1,\dots,n \iff (3)'\quad \sum_{j=1}^{n}(Az_k,z_j)\beta_j-(f,z_k)=0,\ k=1,\dots,n$$

Uw. $(3)'$ układ równań liniowych o niewiadomych $\beta_1,\dots,\beta_n$ i macierzy współczynników $C=\{(Az_k,z_j)\}_{k,j=1,\dots,n}$

(tzw. macierz Gramma)

$C = (c_{kj})$, $c_{kj} = (Az_k, z_j)$

C - macierz dodatnio określona i nieosobliwa (bo $z_1, \dots, z_n$ - lin. niezal.)
zatem $(3)'$ można rozwiązać jednoznacznie

Dowodzi się, że $\{u_n\}$, skonstruowany powyżej, jest ciągiem minimalizującym funkcjonału I (obliczeń troszkę więcej...) więc opuszczam

Uwaga praktyczna:

Przyjrzyjmy się jeszcze układowi $(3)'$ $\sum_{j=1}^{n} (Az_k, z_j)\beta_j = (f, z_k)$ $k = 1, \dots, n$

$$(Az_k, z_j) = \iint_D \left(\frac{\partial z_k}{\partial x} \frac{\partial z_j}{\partial x} + \frac{\partial z_k}{\partial y} \frac{\partial z_j}{\partial y} \right) dx\,dy$$

Staram się wybrać funkcje bazowe $\{z_k\}$ tak, aby:

1) $Az_k = \lambda_k z_k$, $z_k \in H_A$ $\Longrightarrow$ $C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

2) $\frac{\partial z_k}{\partial x}$, $\frac{\partial z_k}{\partial y}$ $k = 1, \dots, n$ miały małe nośniki (wówczas mac. C też będzie miała dużo zer)

Przykład

Do najczęściej stosowanych ciągów funkcyjnych $\{z_k\}$, zależnie od geometrii obszaru, należą:

- dla prostokąta $D = [0, a] \times [0, b]$: $z_k(x,y) = x^k y^k (x-a)(y-b)$
- dla koła o promieniu R: $z_k(x,y) = x^k y^k (R^2 - x^2 - y^2)$.